第２章　不確実性下での決定理論

## 2.1節　導入

本章では効用関数の導入とその性質について記載する．特にリスク回避度の概念を考えるのに重要である事を示す．

## 2.2節　決定理論（リスクなし）

経済主体は自身の選好に従って行動する．選好の記述するために使用する関係としては以下の関係がある．なお，以下ではをキャッシュフローであるとする．

* 経済主体にとってがよりも同等以上に好ましいことを，以下のように記載する．
* 経済主体にとってとが無差別であることを以下のように記載する．

また，以下の２条件が成立するとき，経済主体は「合理的」であるという．

* 完備性：任意の，に対して，，，のいずれかを宣言できる．
* 推移性：に対し，かつならば

合理性はそれほど強力な制約ではなく，選好を何らかの関数で表すためには，追加的な制約が必要である．

* 連続性：

|  |
| --- |
| 定理2.1  選好が合理的で，連続性が満たされるとき，効用関数と呼ばれる連続関数が存在し，以下の命題が成立する． |

効用関数は一意的に決まるものではない．また，経済主体の満足度を表すのではなく，あくまで選好によるキャッシュフローの順序を付ける事しかできない．すなわち，効用関数の値自体に意味があるのではなく大小関係に意味がある．

## 決定理論（リスクあり）

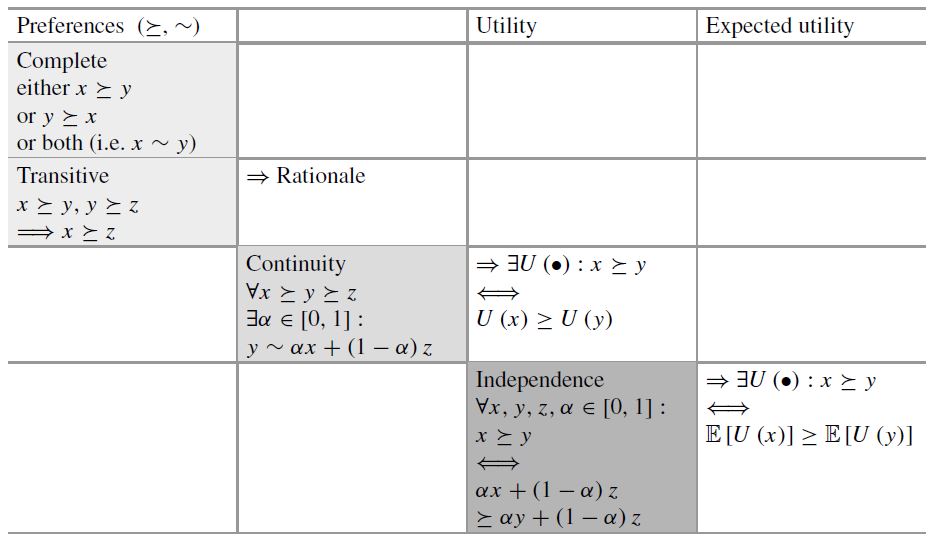
前節では効用関数の引数は確定的な量を想定していたが，本節では引数として確率的なものであると考える．この場合，選好は別の性質を持つ必要がある．

* 独立性：

|  |
| --- |
| 定理2.2  選好が合理的で，連続性と独立性が満たされるとき，効用関数と呼ばれる連続関数が存在し，以下の命題が成立する． |

この場合も効用関数は一意的ではない．実際，アフィン変換によって上述の不等式は変化しない[[1]](#footnote-1)．

これまでの内容をまとめると以下の通りである．



## 2.4節　期待効用に対する批判

## 2.5節　リスク回避

本節ではリスク回避度の概念の導入とそれによる効用関数の分類を行う．簡単のため，確率で,確率でという値をとる確率変数を考える．

|  |
| --- |
| 定義2.1  経済主体が（A）「リスクを取り，もしくはの利得を得る」か（B）「無リスクで期待値を得る」か選択を迫られたとき，（B）を選好する場合，経済主体はリスク回避的という． |

これを式で表すと以下のようになる（Jensenの不等式）．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |

この不等式をグラフで表すと図 1の通りである．Jensenの不等式はの直線が，同区間の効用関数を下回る事を意味する．これは凸関数の定義そのものである．したがって以下の命題が成立する．

|  |
| --- |
| 命題2.1  経済主体は効用関数が凸関数であるときにのみリスク回避的であるという． |

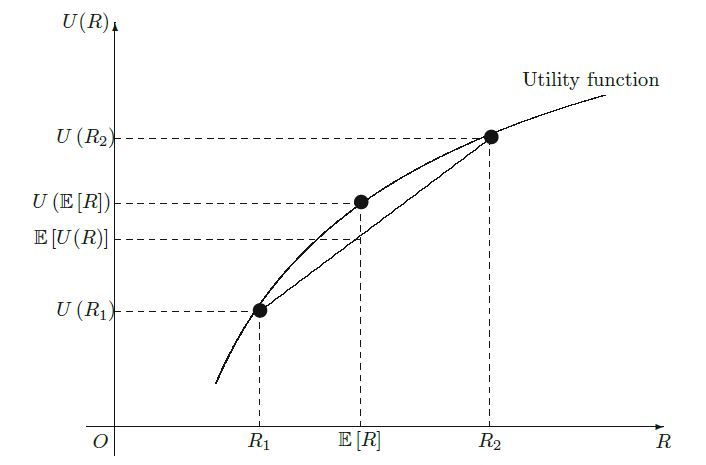


図 1　凸効用関数

同様に，リスク愛好的であるとは効用関数が凹関数であることであり，リスク中立的であるとは効用関数が直線である事である．したがって，リスク回避性を図るには「凹みの度合い」を測定する必要がある．

ArrowとPrattは別のアプローチで，凹みとリスク回避性を関係づける結果を導き出した．このアプローチではまず初めに，Jensenの不等式について等式を満たすよう，以下のを導入する．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2) |

は経済主体がリスクを避けるために支払う最大の富であり，リスクプレミアムと呼ばれる．また，上式左辺のは確実性等価と呼ばれる．

リスク回避度を導入するため，(2)の両辺をテーラー展開する．

* (2)右辺について

をの周りでテーラー展開し，２次のオーダーまでを残す．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3) |

期待値をとり，以下の式を得る．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4) |

* (2)左辺について

の周りでテーラー展開し，1次のオーダーまでを残す．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5) |

(2)(4)(5)式を用いて，について求められる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6) |

したがって，リスクプレミアムは効用関数の２階微分と1階微分の比に比例するが，この比はArrow Prattのリスク回避度（絶対的リスク回避度）とよばれる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (7) |

また，経済主体の行動は富の大きさにも左右されるため，以下の相対的リスク回避度もよく使われる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8) |

　リスク回避度の逆数はリスク許容度と呼ばれ，以下の式で計算される．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9) |

効用関数はリスク回避度の関数形によって，HARA，CARA，CRRA，DARA，IARA，DRRA，IRRAに分類される．命名規則は以下の通りである．

* 最初の文字は２文字目で指定されるリスク回避度（絶対的もしくは相対的）が一定ならば“C”，増加関数ならば“I”，減少関数なら“D”，という形ならば“H”
* ２文字目については絶対的リスク回避度であれば“A”，相対的リスク回避度であれば“R”
* 最後にRisk Aversionの略であるRAを付ける．

最も一般的な効用関数の形の一つは以下の通りである．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (10) |

が整数でない場合はの値が正である必要がある．したがって，効用関数の定義域は以下のようになる．

効用関数の微分は次の通りである．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (11) |

1階微分の式よりこの効用関数は単調増加関数であることがわかる．また，２階微分の式より，が正である限り上に凸である事がわかる．上式より，絶対的リスク回避度は以下のようになる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (12) |

(10)式の効用関数はパラメータに制限を加えることで，いくつかの種類の効用関数を再現できる（図 2）．

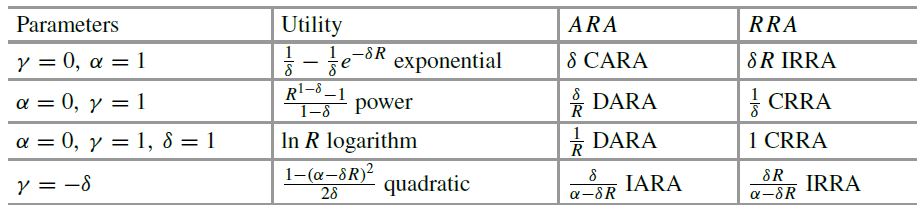


図 2　パラメータによって再現される効用関数

の場合，効用関数は極大点を持つ．すなわち，の範囲では単調増加であり，では単調減少である．したがって，最適な富は以上の値にはならないため，一種の最適化の目的値（target）になる．いくつかの文献ではこの効用関数を使ったアプローチを「ターゲットアプローチ」と呼んでいる．

Inada(1963)は無矛盾なモデルを構築するために効用関数が持つべき性質を提案している．

|  |  |
| --- | --- |
| **性質** | **補足** |
|  | どんな効用関数もこれを満たすように調整できるため，この条件は効用関数を制限するものではない． |
|  | すなわち効用関数は連続関数である． |
|  | 効用関数が単調増加である事を課す条件であるが，これはどんな経済主体も富が少ないことよりも大きいほうを好むことを意味する． |
|  | 効用関数が上に凸である事を課す条件であるが，これは経済主体がリスク回避的である事を意味する． |
|  | においては富が微小に増加した際，効用関数の変化率が無限大であることを課す．これは最適な富が0には成りえないことを意味する． |
|  | 富が無限大に近づくにしたがって，富の増加による効用関数の増加は０に近づく． |

## 2.6節　The Stone-Geary 効用関数

## 2.7節　金融市場における確実性等価

本節ではRを用いて，S&P500（図 3）の確実性等価を計算している．使用する効用関数は以下のCRRA型効用関数である．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (13) |

確実性等価を とすると，定義より以下の式が成立する．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (14) |

この値をのグラフとして書いた図が図 4である．リスク回避度が大きくなるにつれてS&P500に対する期待効用が小さくなるため，減少関数になっている．

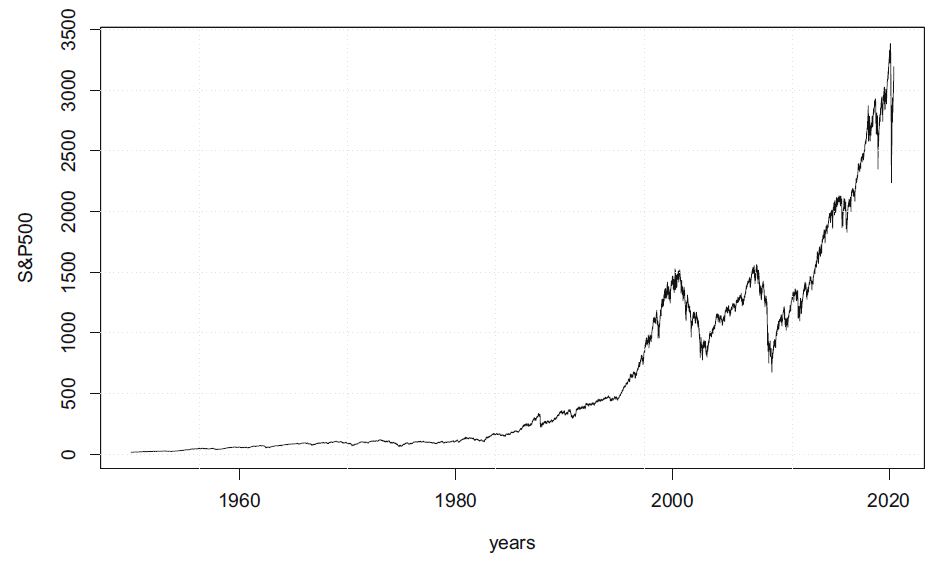


図 3　S&P500の時系列

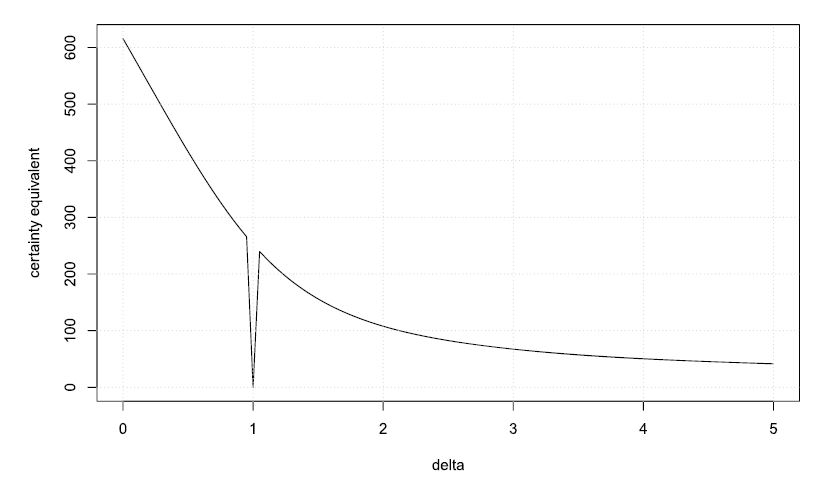


図 4　確実性等価

## 2.8節　効用と時間

経済主体は時点での富を保有することと，時点での富を保有することを比較した際，前者を選好すると考えるのが自然である．したがって，効用関数が時間に依存する場合，以下の式が成立する．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (15) |

明示的な形でこの効果を取り扱うために，時刻の減少関数を用いて効用関数を以下のように分解する．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (16) |

ここで，は前節までで考えてきた，時間に依存しない効用関数である．はある意味，割引関数のような役割を果たしており，異時点間の効用を比較できる．例えば，時刻において，時刻においての富を保有する場合，その合計の効用は以下のように記述される．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (17) |

上式より，から得られる効用はから得られる効用と比較する際，という因子がかける必要がある事がわかる．

割引関数は経済主体の選好に応じて様々な形をとる[[2]](#footnote-2)．離散時間を仮定する場合，主観的割引率を用いた以下の形がよく使われる．

この割引関数の形を仮定する事で，割引関数の比が再度割引関数になるという利点がある．

|  |
| --- |
| 定義2.2  割引関数はが成立するとき，分離可能であるという． |

分離可能でない場合，異時点間の効用に矛盾が生じる．

効用関数に時間的な効果を取り入れる別の方法として，効用関数が現在の富だけではなく，過去の富にも依存すると考える方法がある．例えば，以下のように効用関数を定める．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (18) |

ここで，は過去の富に対する重みである．また，この場合，選好は「habit formation」を考慮する必要がある．つまり現在の富が過去の富の加重平均よりも大きいときにのみ経済主体の効用が大きくなるようにする必要がある．

## 2.9節　初めての年金モデル

前節の知識を使い，簡単な年金の問題を取り扱う．問題設定は以下の通りである．

* 第一期間で働いて労働収入を得て，第二期間に年金を受け取るとする．
* 第一期間では労働収入の内，割だけ年金ファンドに支払う．残った金額は消費する．
* 第二期間では年金ファンドに支払った額をで積み立てた額を消費する．
* 効用関数を以下の式で仮定する．
* したがって，以下の最適化問題を解く．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (19) |

(.19)式をで微分した値を0とすると，

|  |  |
| --- | --- |
|  | (20) |

ここで，期待値の中の効用関数の導関数の比はIMRS（Intertemporal Marginal Rate of Substitution）と呼ばれる．

例として，経済主体の効用関数が以下のCRRA型の効用関数であるとする．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (21) |

この時，(.18)式より，最適な以下ように求められる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (22) |

この関係式からが増加するとが減少することがわかる，やとの関係は自明ではない．また，は給料に依存しない事がわかるが，これはCRRA型効用関数のは相対的リスク回避度が富に依存しない事に起因する．

以下ではとしてS&P500のリタ―ンを使い，との関係の関係をグラフ上で示したのが図 5である．図よりが増加するとも増加することがわかる．

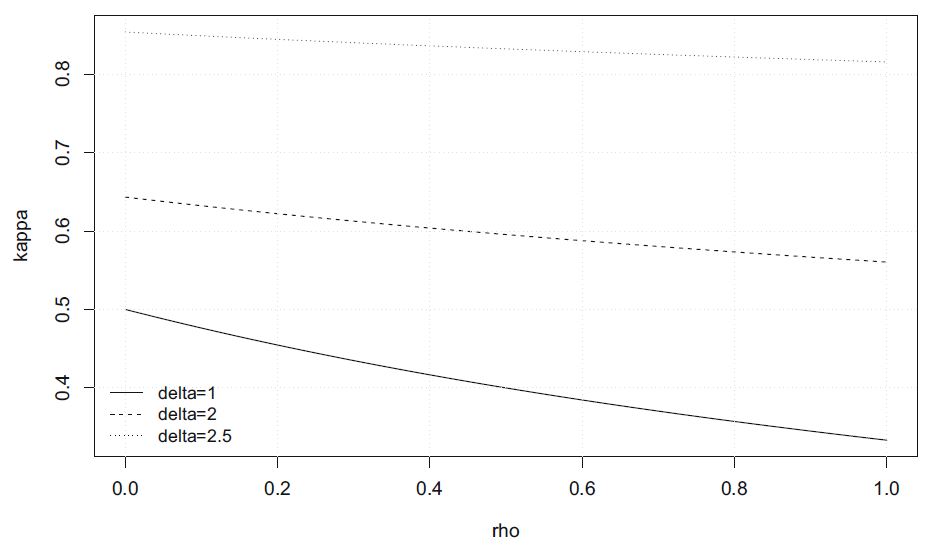


図 5　の値

本節では問題を簡単にするためにいくつかの仮定をした上で議論を進めたが，より現実的な枠組みで算出を行うために以下の点を考慮する必要がある．

* 死亡リスク

経済主体は必ず二期間生存するという前提で議論を進めていたが，現実的には確率的な死亡時点を考慮する必要がある．

* 長生きリスク

死亡リスクを考慮したとしても，死力が確定的であれば長生きリスクが考慮できない（5章参照）．したがって，より現実的には確率的に変動する死力を考慮する必要がある．

* 金融市場の存在

本節では経済主体が賃金を消費か年金ファンドへの支払いに充てる事を想定しているが，現実的には金融市場への投資も考えられる．

第3章　確率過程

## 3.1節　導入

年金ファンドのアロケーションを決めるにあたり，死力や資産のリターン等，確率的に変動する量を扱う必要がある．したがって，本章では確率過程について説明する．

## 3.2節　確定的な線形微分方程式

## 3.3節　確率的な線形微分方程式

経済変数は以下のような線形微分方程式で記述される事が多い．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (23) |

不確実性（リスク）を考慮した場合，上式は以下のように修正される．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (24) |

ここで，は確率的な関数であり，はウィーナー過程である[[3]](#footnote-3)．

伊藤の公式を用いて，以下の等式が成立する．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (25) |

,が確定的で，以下の式を満たすが存在する場合，平均回帰性を見出すことができる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (26) |

このとき，(.25)よりの期待値を計算できる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (27) |

これは時刻においてとすればそれ以降，任意の時刻においてであることを意味する．さらにが負であれば以下の式が成立する．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (28) |

したがって，は時間がたつにつれ，に収束する（平均回帰性）．

## 3.4節　金融市場で用いる確率過程

ファイナンスで使用する確率微分方程式は大抵，以下の式で記述される．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (29) |

パラメータの値によって以下の３つの有名な確率微分方程式が導ける．

* 幾何ブラウン運動モデル：

このモデルは株式インデックスのモデル化によく利用される．は(.29)に伊藤の公式を適用することで得られ，対数正規分布に従うことがわかる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (30) |

* バシチェックモデル：

この時，は以下の式で表される．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (31) |

特徴としては以下の通りである．

* + 正規分布
  + 等分散性（の分散が時刻に依存しない）
  + 負の値をとり得る

例えば，GDP成長率やインフレーション率は負の値をとり，特定の値に均衡する傾向がある．一方で，これらの経済変数は実際は不均一分散であるため，このモデルは適していないと考えられる．

* コックスモデル：

このモデルの性質は以下の通りである．

* + 期待値はバシチェックモデルと同じであるが，分散は異なり，自体に比例する．
  + （Feller条件と呼ばれる）が成立するとき，は0以下の値をとらない．
  + closed-formの解は存在しないが，に対するclosed-formの解は存在する．この性質はがリスクフリーレートの時，が割引債の価格と一致するため，重要な役割を果たす．

## 3.5節　パラメータ推計

パラメータ推計をするための手法として，確率微分方程式を有限差分に置き換える方法がある．この場合，(.29)は以下のように置き換えられる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (32) |

ここで，は標準正規乱数である．なお，パラメータの推計の方法としては主に以下の二つの方法がある．

* モーメント法

観測データから計算されるモーメントと理論的に計算されたモーメントを一致させる方法．

* 最尤推定法

与えられた分布から観測データを引き出すための確率を最大化する方法．

(.32)をOLSで推計する際，必要な前提条件として等分散性がある．しかしながら，は一般には不均一分散である．したがって，から等分散性を持つ新たな変数を定義する必要がある．具体的には，以下のを定義する．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (33) |

伊藤の公式により，が満たす確率微分方程式は以下の通りである．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (34) |

上式より，分散はであるため，モーメント法を用いて以下の式でが推計できる[[4]](#footnote-4)．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (35) |

また，その他のパラメータについても(.34)を有限差分に置き換えた式にOLSを適用することで推計できる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (36) |

特に幾何ブラウン運動の場合（）は以下の式が成立する．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (37) |

この時，

|  |  |
| --- | --- |
|  | (38) |

であるため，以下の算式によりとが推計できる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (39) |

## 3.6節　金利の数値例

## 3.7節　シミュレーション

## 3.8節　状態変数

経済的な枠組みが以下の確率微分方程式に従う個の状態変数で記述できるとする．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (40) |

ここで，，は次元のベクトル，はの行列，は次元の独立なウィーナー過程である．状態変数の例としては以下のようなものが挙げられる．

* + 無リスク金利
  + リスクの市場価格
  + 一般物価水準
  + 資産リターンのボラティリティ

第４章　金融市場

## 4.1節　導入

金融市場を確率過程で記述する事は，動的な最適化問題を解くうえで基本的である．特に本章では金融市場が無裁定で完備である事を確認する方法を示す．どんなモデルも無裁定を無視する事は出来ないため，本章でものちのち無裁定を仮定することになる．一方で完備性の仮定はマルチンゲール法を使用するために必要なテクニカルなものである．

無裁定条件は資産価格付け第一基本定理を示すための仮定である．この仮定の下ではリスク中立測度が存在する．本章では任意のリスク性資産の価格付けをリスク中立測度を使用することで実施する．

## 4.2節　金融資産

金融市場に以下の確率微分方程式に従う個のリスク性資産が存在すると仮定する．

|  |  |
| --- | --- |
| ：リスク性資産の価格（次元ベクトル）  ：対角成分がである対角行列  ： 次元ベクトル  ： 次元ベクトル  ：次元のウィーナー過程 | (41) |

さらに金融市場には以下の微分方程式を満たす無リスク資産が存在する．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (42) |

上式を解くことで，以下の算式が得られる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (43) |

なお，はディスカウントファクターと呼ばれる．

## 4.3節　ポートフォリオと富

ポートフォリオの価値は以下の式で与えられる．

|  |  |
| --- | --- |
| ：リスク性資産に対するウェイト（次元ベクトル）  ：無リスク資産に対するウェイト | (44) |

ポートフォリオの価値の変動は，資産価値のみではなくウェイトも確率的に変動すると仮定すると，

|  |  |
| --- | --- |
|  | (45) |

となる．

ポートフォリオの価値は利用可能な富によって制約を受ける．考えられる場合としては以下の３つが挙げられる．

* Strict self-financing condition

|  |  |
| --- | --- |
|  | (46) |

ポートフォリオの価値以上の富を持たず，ポートフォリオからいかなる富の引き出しや投入を行わないことを意味する条件である．

* Outflows

|  |  |
| --- | --- |
|  | (47) |

時刻の間にだけポートフォリオから富を引き出すという条件である．

* Inflows

|  |  |
| --- | --- |
|  | (48) |

時刻の間にだけ富を受け取り，そのうちだけポートフォリオに投入するという条件である．

年金ファンドでは加入者から保険料を受け取る積立期間と加入者に年金を支払う分配期間を考える必要がある．積立期間はInflow，分配期間はOutflowに相当する．

Inflow及びOutflowはまとめて以下の式で表すことができる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (49) |

ここで，は正負どちらの値もとる量である．この式を(.45)式に代入すると

|  |  |
| --- | --- |
|  | (50) |

となる．さらに(.41)(.42)式を代入することで以下の式を得る．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (51) |

## 4.4節　キャッシュフローと修正富

大抵のテキストでは富を記述する確率微分方程式はキャッシュフローを含まない（）．ここでは以下の確率微分方程式を満たすを使用することで，の場合について調べる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (52) |

(.51)(.52)より以下の式が成立する．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (53) |

ここで， である．最後の式により，仮にが0でないとしても を考えることでが0である式に変形することができる．

は各資産に投資している富であるが，今後の節ではこの値が に占める割合を使用することがある．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (54) |

を使えば富の変動を表す式は以下のように書ける．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (55) |

## 裁定

ここでは裁定を無リスクでかつリスクフリーレートとは異なるリターンを持つポートフォリオと定義する．したがって，(.70)より，以下の条件が成立することが裁定の条件であることがわかる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (56) |

金融市場に裁定が存在するかどうかを調べるために以下のフレドホルムの補題を使用する．

|  |
| --- |
| **フレドホルムの補題**  行列及びベクトルが与えられた時，以下のいずれかが成立する． |

，とした場合，上述の(2)が成立している状況が裁定である．逆に(1)が成立していれば(2)は成立しないため，無裁定となる．したがって，以下の主張ができる．

|  |
| --- |
| **命題4.1**  金融市場は以下の式を満たすが存在するときにのみ，無裁定である． |

リスク性資産が一つしかない場合について考えると，上式は

|  |  |
| --- | --- |
|  | (57) |

となる．ここで，は株式のボラティリティである．この場合はが行列ではなく，スカラーになるので，でない限り必ず無裁定になる．また，は単位リスク当たりのリスクプレミアムであり，「リスクの市場価格」と呼ばれる．

以下のように２つのリスク資産とが一つのリスクソースによってその確率的な変動が記述される場合を考える．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (58) |

この場合，無裁定条件は以下の式を満たすが存在するときのみ成立する．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (59) |

の解が存在する必要十分条件は以下の式が成立することである．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (60) |

したがって，この式が成立しない限り，無裁定には成りえない．上式が意味する事は同じリスクソースに依存する資産がある場合，リスクの市場価格は等しくなる事を意味している．信用リスクを無視した債券市場が実例としてこの状況に近い．この場合，債券価格は金利という唯一のリスクソースに依存するため，これらの債券のリスクの市場価格は全て等しくなると期待される．

## 4.6節　完備性

|  |
| --- |
| **定義4.1**  金融市場は任意の資産が適切なポートフォリオによって複製できるときにのみ完備であるという． |

以下では，どのような条件を満たせば完備になるか考える．以下の式に従う資産を仮定する．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (61) |

ここで，は次元ベクトル，を次元のウィーナー過程とする．市場が無裁定であるとすると，以下の式を満たすが存在する．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (62) |

したがって，(.61)式は以下のように書ける．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (63) |

4.4節よりポートフォリオの富は以下のように表される．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (64) |

が複製できるためには， のドリフト項と拡散項がのものと一致している必要があるが，無裁定の条件の下では拡散項が一致する事を課すだけで十分である．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (65) |

この条件を用いると，の変動は以下のように変形できる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (66) |

ここで，無裁定条件を課すと，以下のようになり， の変動と同じになる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (67) |

したがって，無裁定条件の下では(.65)式を満たせば複製できる．

無裁定条件は以下の式で表されるが，を満たすが存在するときのみ，に解が存在する．

一方で，複製できるための条件はを満たすが存在するときのみが存在する．したがって，以下の命題が成立する．

|  |
| --- |
| 命題4.3  金融市場はを満たすが一意的に存在する場合にのみ完備であるという． |

## 4.7節　確率の変更と資産価格

4.6節より，資産は以下の確率微分方程式に従う．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (68) |

Girzanovの定理によるとは別の確率測度の下での別のウィーナー過程である．新しい確率測度の下では期待リターンは全てリスクフリーレートに等しい．したがって，新しい確率測度はリスク中立測度と呼ばれる．

|  |
| --- |
| 定理4.1  を満たすベクトルが存在するとき，以下の式を満たすような確率測度が存在する．  この時，以下のラドンニコディム微分はマルチンゲールである[[5]](#footnote-5)． |

定理4.1には完備性は必要なく，無裁定であれば十分である．

リスク中立確率測度の下では資産の割引過程はマルチンゲールになる．この結果は以下のようにして導ける．

両辺を積分し，期待値をとると，

となるので，割引過程がマルチンゲールである事がわかる．

割引過程がマルチンゲールであることを使うと以下のように時刻での資産価格が求められる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (69) |

なお，はディスカウントファクターであることに注意する．

|  |
| --- |
| 定理4.2（資産価格付け第二基本定理）  無裁定条件が成立する場合，資産価格は(.63)式で表される． |

なお，(.69)式は資産価格についてその現在価値を計算するための公式を与えているが，一般に資産価格だけではなく，将来のキャッシュフロー（例えば，債券投資におけるクーポン等）の現在価値は(.69)式のをで置き換えた式で与えられる（資産価格付け第二基本定理）．

## 4.8節　債権価格：Closed Formとシミュレーション

割引債の価格は以下の式で表される．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |

一般的には上式をclosed formの形で書くことはできないため，シミュレーションを通して求める．しかしながら，式●●においての場合は，closed formが存在する．より一般的に，以下の確率微分方程式に従う金利を考える．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |

また，リスクの市場価格を以下の形であるとする．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |

この時，リスク中立測度下での確率微分方程式は以下の式で表される．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |

|  |
| --- |
| **命題4.4**  リスク中立測度下で金利が以下の式に従うとする．  この時，割引債の価格は以下の式で表される．  ここで，  **証明**  と表されるとする．であるため，  である．リスク中立測度下ではのリターンはなので，伊藤の公式を使うと以下の式が成立する．  上式より，以下の２つの方程式が成立する．  2つ目の方程式はリッカチ微分方程式と呼ばれ，以下の解で与えられる．  一方，については１つ目の方程式を積分することでえられる． |

## 4.9節　確率同士の変換

確率測度及びの下での期待値について，ラドンニコディム微分を用いると以下のような変換ができる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |

上式におけるの役割より，はプライスカーネルと呼ばれる．ここで，

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |

とする．を踏まえると(1)より，以下の式が成立する.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |

従って，実確率測度の下では，確率的ディスカウントファクターで割り引いた資産価格はマルチンゲールになる．

その他の便利な確率測度としてフォワード測度がある．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |

新たな測度を以下のように定義する．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |

この時，割引債の価格を用いて(1)式より以下の式が導ける．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |

したがって，測度の下では資産を割引債価格で割った過程はマルチンゲールであることがわかる．

## 節4.10　ニューメレールの変換

本節では以下の確率微分方程式を満たす２つの資産が市場にあるときに，をニューメレールとする確率測度が存在するかどうか確認する．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |

Nをニューメレールとする確率測度をとする．この時，は確率測度の下でマルチンゲールになる．伊藤の公式を用いると，以下のように変形できる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |

Girsanovの定理により，リスク中立測度からに変換するには以下のように変換すればよい．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |

この時，

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |

となるため，はマルチンゲールとなる．

## 4.11節　クーポン及び配当を持つ資産

連続的なクーポン・配当を持つ資産を考える．この時，資産価格付け基本定理より，リスク中立測度の下ではクーポンや配当を含めたトータルの期待リターンが無リスク金利と等しい．したがって，以下の式が成立する．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |

これは，クーポン・配当のない資産と比べて，クーポン・配当のある資産は期待収益率が低下する．実際，金融市場では配当が支払われた瞬間に株式の価値が低下する事に注意する必要がある．

|  |
| --- |
| 例4.5  クーポン・配当・無リスク金利が全て確定的な関数であるとする．この時，時刻から時刻までクーポンが支払われる資産の価格は以下の式で表される．  この式を微分すると， |

上述の例により，債券価格が

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |

と表されるのであれば，微分の期待値は以下のようになる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |

仮にクーポンが確定的であった場合，は以下のように簡単な形となる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |

|  |
| --- |
| 例4.6  クーポンレートが無リスク金利に等しい債券（perfectly indexed bond）を考える．  したがって，このようなperfectly indexed bondは常にパー債券である． |

上述の例の結果はキャッシュフローがクレジットリスクに左右される資産の価格付けで使用する．

第5章　生保数理的な枠組み

## 5.1節　導入

この章では，死力について確定的及び確率的なモデルについて説明を行う．また，USのデータを使用してパラメータのカリブレーションを行う．

## 5.2節　生保数理的な量

本節では今後必要となる生保数理的な量をいくつか定義する．

まず初めに，人間が死亡する時刻の確率密度関数を考える．定義より，を寿命の最大値であるとすると，以下の式が成立する．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (70) |

この確率密度関数を用いると，死亡率，生存率，死力が以下の式で定義できる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (71) |

ここで死力とは，歳に到達した人が次の瞬間に死亡する確率を表す[[6]](#footnote-6)．

債券価格評価の枠組みで考えると，生存率については安全資産に，は割引債の価格に，死力はリスクフリーレートに似た役割をしている．例えば，生存率を時刻で微分すると，以下のようになる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (72) |

これは時刻における安全資産の価格を，リスクフリーレートをとした場合に成立する以下の式に類似している．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (73) |

また，(72)式の両辺をという境界条件の下で解くと以下のようになる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (74) |

ここで，時刻まで生存するという条件の下で，（）まで生存する確率をとすると，ベイズの公式により，(75)式が成立する．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (75) |

ここで，定義より左辺はそのものである．一方，右辺のはであるため１となり，，についてはそれぞれ，である．したがって(74)式を踏まえると以下の関係式が成立する．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (76) |

次節では死力を確率過程として扱うが，その場合は(76)式の右辺について期待値をとった式が成立する．一方，時刻における，満期の割引債の理論価格は(77)式で表され， とが対応していることがわかる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (77) |

## 5.2節　確率的な死力モデルと資産価格

長生きリスクは死力の予期できない変動で定義される．したがって，死力を確定的な過程であると仮定する限り，長生きリスクを考慮した議論をすることはできない．したがって，本節では，死力を確率過程であると仮定する．また，例としてアニュイティと呼ばれる保険契約についてその価格の評価をする．

死力を確率過程であるとした場合，(76)式の右辺は期待値となって，以下の式が成立する．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (78) |

この式を使用した例として，死亡時点までの各時点に連続的にの金額だけ受け取る契約（アニュイティ）を考える．この契約の価値は以下の式で与えられる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (79) |

ここで，右辺の期待値は以下の条件付き期待値を表す．は金融市場のリスクの源泉であるウィーナー過程から生成される集合，はから生成される集合である．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (80) |

恒等関数と条件付き期待値のタワープロパティを使うと，(79)式より，以下のように式変形できる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (81) |

また，最終的な式ではの情報は必要がないことがわかる．（は明白な形でに依存していない．）．上式により，アニュイティの価格はの値を金利として割り引かれた債券価格と同じであることがわかる．

## 5.4節　Gompertzの枠組みにおけるアニュイティ

最も一般的な死力のモデルは以下の式で表される（Perks,1932）．

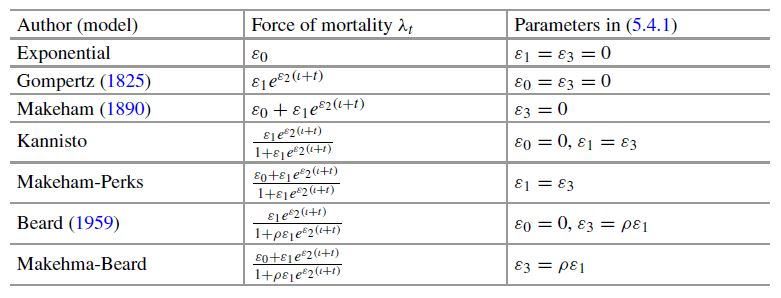
|  |  |
| --- | --- |
| ：パラメータ  ：年齢 | (82) |

この時，年齢の人が時刻において期間生存する確率は以下の式で表される．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (83) |

パラメータの選び方によって表 1のように複数のモデルが存在する．本節ではこのモデルの中でもGompertz（1825）を使用する．これは，このモデルが死力をある程度正確に記述できる上に，いくつかの生保数理的な量がクローズドフォームの形で記述することができるからである．

表 1　死力のモデル



本節ではGompertz-Makehamによる死力としてパラメータを含む以下の表式を用いる[[7]](#footnote-7)．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (84) |

ここでパラメータは事故死等の年齢に依存しない要因による死亡を表すファクターである．この死力を前提とした生存率は(74)式より以下のように計算できる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (85) |

(.85)式の生存率を用いて微小時間の間にの支払いが行われるアニュイティの評価を行う．この際，リスクフリーレートは期間を通して一定であるとする．(81)式より，以下の積分を計算すればよい．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (86) |

ここで，と置くと，以下のように変形できる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (87) |

なお，で定義されるガンマ関数である．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (88) |

数値例としてアニュイティ価格を計算したグラフを記載する．年齢が高くなるほど，受け取れる価格が少なくなるので，アニュイティ価格自体も小さくなる．また，女性の方が長生きである事が反映され，女性を前提としたアニュイティの方が価値が高くなっている．

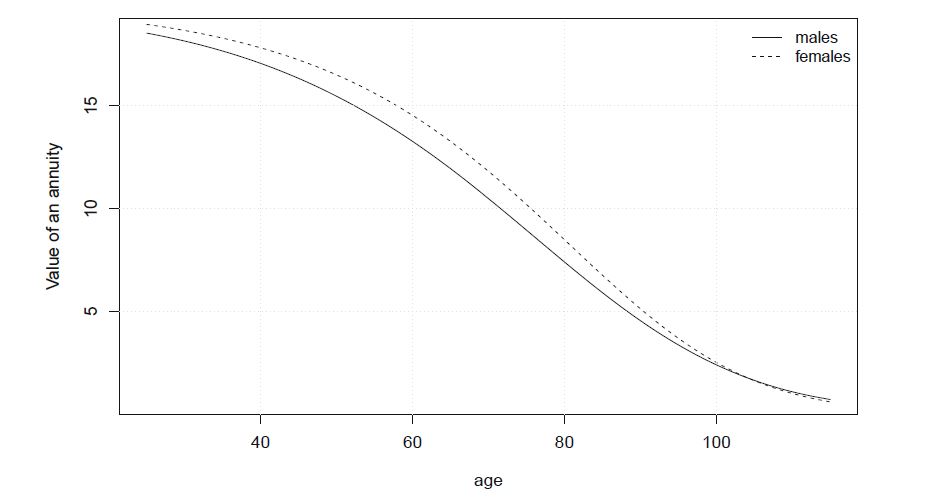


図 6　アニュイティ価格

## 5.6節　Gompertzの死力モデルの推計（Rcodeあり．それほど重要ではないので記載しない．）

本節では，HMD（Humal Mortality Database）のデータを用い，Gompertzの死力モデルに含まれるパラメータを推計する．

## 5.7節・5.8節　死力・生存率の確率的モデル

本節では，死力の時系列に対して確率的なモデルを仮定し，HMDのデータを使用してパラメータ推計を実施する．

死力の確率的なモデルではある値に均衡するのが望ましい．ただし，均衡値については時間に依存する量を仮定する．これは，一定値であるとすると生存率が現在の年齢に依存しない算式となるためである．実際，死力が時刻からの間一定値となった場合，生存率は以下のように計算され，年齢に依存しないことがわかる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (89) |

時間に依存する均衡値を持つ死力の確率的モデルとして以下のモデルを使用する．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (90) |

と置くと，伊藤の公式により，の微小変化は

|  |  |
| --- | --- |
|  | (91) |

で表される．両辺を積分し，期待値をとることで以下の式を得る．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (92) |

ここで以下の２点を仮定する．

1. の初期値との初期値が等しい：
2. 死力の期待値はGompertz-Makehamモデルと一致する：

①と(.92)式により，死力の期待値について以下の式が成立する．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (93) |

さらに，②の仮定を踏まえれば，は以下のようになる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (94) |

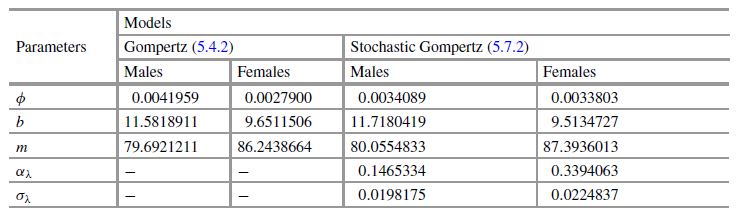
CIR過程の性質を利用するためにを以下の式で仮定する．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (95) |

最終的に死力の確率過程として以下の式を仮定する．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (96) |

パラメータ推計については４章で金利パラメータの推計を実施した時と同じ方法で実施．

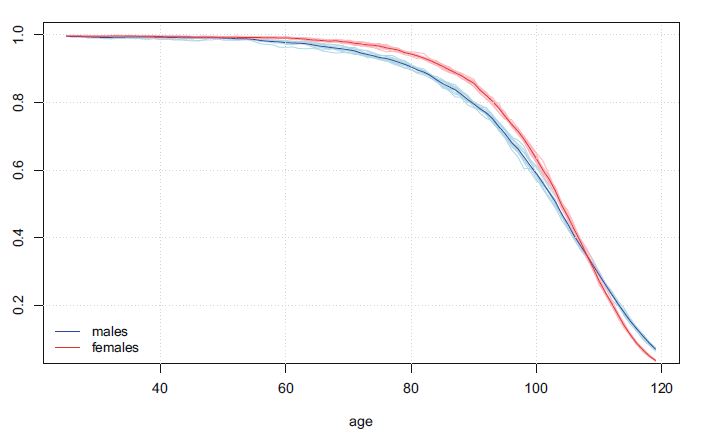


生存率については，金利モデルから割引債の価格を算出する時と同様の方法で算出できる．(78)式を用いると，以下のように算出できる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (97) |

また，伊藤の公式を用いれば生存率が従う確率微分方程式は以下の通りである．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (98) |



## 5.9節　生保数理的なリスクを受ける富の発展

第6章　生保数理的な金融商品

本章では，生保数理的な量を基にしたデリバティブである以下の３つの商品について価格を評価する．

1. 長寿債券
2. トンチン
3. デス・ボンド

これらの金融商品は他の生保数理的な金融商品を評価するうえでも重要な例である．また，純粋な金融マーケット上では死力と十分な相関を持つ資産は少なく，理論的には完備性を持たせるうえでも重要である．

## 6.2節　生保数理的な金融商品の確率微分方程式

生保数理的な量を原資産として持つデリバティブはクーポンや満期でのペイオフが人口動態的な量を用いて書かれる債券であると考えることができる．したがって，このようなデリバティブの価格は以下の算式で与えられる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (99) |

ここで，死力及び金利が従う確率微分方程式として以下の式を仮定する．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (100) |

伊藤の公式を用いると，が従う確率微分方程式が導ける．

|  |  |
| --- | --- |
| ただし，変数に対して，  とする． | (101) |

さらに，テキストの定理4.2より，リスクの市場価格を用いて以下のように書き換えることができる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (102) |

## 6.3節　長寿債券

|  |  |
| --- | --- |
|  | (103) |

長寿債券とはクーポンが時刻から時刻までの生存率で表される債券である．したがって価格は以下の式で表される．

(103)式より，長寿債券は満期までの期間で代表的な被保険者が生存している期間まで単位通貨のクーポンが得られる債券であると解釈できる．

さらに，死力と金利の確率過程が独立であると仮定すると，以下のように変形できる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (104) |

ここではリスク中立測度の下での生存率である．

この式より，長寿債券は，複数のゼロクーポン長寿債券の集まりと見なすことができる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (105) |

また，ゼロクーポン長寿債券は以下の確率微分方程式を満たす．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (106) |

## 6.4節　トンチン年金

トンチン年金とは，出資者が死亡すると，その出資者が受け取るはずであった年金が生存する出資者に割り当てられる終身年金制度の事である[[8]](#footnote-8)．

ある出資者の持つトンチン年金の価値は以下の算式で与えられる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (107) |

時点において生存している出資者の人数はで与えられるので，トンチン年金全体の価値は

|  |  |
| --- | --- |
|  | (108) |

となる．長寿債券と同様，トンチン年金もゼロクーポントンチン年金の和としてあらわされる．

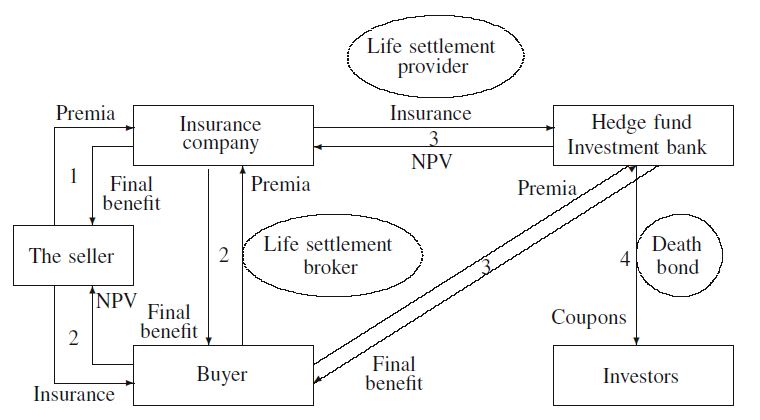
|  |  |
| --- | --- |
|  | (109) |

(103)式と(109)式を比較すると死力の符号が逆であることがわかる，従って，死力が上昇すれはトンチン年金の価値は上昇するが，長寿債券の価値は低下する．

## 6.4節　デスボンド

デスボンドとは生命保険の証券化商品である．具体的には以下の仕組みで発行される債券である．

1. デスボンドの売り手は生命保険の契約者である．
2. 売り手は生命保険契約の買い手をブローカーを通して探す．買い手は保険契約を受け取る代わりに契約の正味現在価値を渡す．買い手は保険契約を保持してるため，保険会社に保険料を払い，売り手が死亡した際に保険金を受け取れる[[9]](#footnote-9)．
3. 保険契約のプロバイダーを通してヘッジファンドや投資銀行が死亡保険を買い取る，従って，ヘッジファンドや投資銀行は保険契約をバイヤーから受け取れるが，保険金をバイヤーに支払う必要がある．
4. ヘッジファンドや投資銀行はある程度保険契約を集め，そこから得られるキャッシュフローをデスボンドのキャッシュフローにして売り出す．



以下ではデスボンドの仕組みについて記載する．保険契約者が支払う保険料を，死亡時における保険金を簡単のために1であるとする．また，保険契約者が時刻に加入したとする．この時，生保数理的及びファイナンス的な均衡が成立しているとすると，以下の式が成立する．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (110) |

5.3節と同様の方法により，

|  |  |
| --- | --- |
|  | (111) |

と変形できる．したがって，この式を満たすは以下のように与えられる．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (112) |

つまり，最適なプレミアムの値は死力の値を長寿債券の価格で加重平均をとった値になる．

第7章　年金ファンドマネジメント

## 7.1節　導入

本章では，以下の４つの資産が存在する市場で，年金ファンドの最適なアロケーション戦略を見つけ出す．

1. 無リスク資産
2. 株式指数
3. ゼロクーポン債
4. 長寿債券

また，最適なポートフォリオは投機部分とヘッジ部分に分かれることがわかる．本章では各部分の性質についても説明する．

## 7.2節　保険料と年金

年金ファンドは運営にあたり，以下の２期間に分かれる．

* Accumulation phase（A-Ph）

この期間では，加入者は周期的に保険料をファンドに支払う．具体的にはファンドへ加入した時点から，退職までの期間である．

* Distribution phase（D-Ph）

この期間では，年金ファンドは加入者に対して年金を支払う．具体的には退職時から死亡時までに機関である．ただし，退職前に死亡した場合，支払いはしない）．

## 7.5節　目的関数

年金ファンドのアロケーションを決める際に使う目的関数は様々であるが一般的なものとして，加入者の死亡時点におけるファンドの富に対する効用関数の期待値を目的関数とし，それを最大化することでアロケーションを決める方法がある．具体的には以下の値を目的関数にする．

|  |  |
| --- | --- |
| ：投資ウェイト  ：加入者が加入した時点  ：加入者が死亡した時点  ：年金ファンドの効用関数  ：加入者が死亡した時点でのファンドの富  ：主観的な割引ファクター[[10]](#footnote-10) | (113) |

さらに，効用関数としては以下のHARA型を仮定する．

|  |  |
| --- | --- |
| ：パラメータ（） | (114) |

はファンドの富のパーセントで最低限到達すべき富の水準である．

## 7.5節　ファンド富の確率的な変動

本節では年金ファンドが加入時点にだけ投資し，その後加入者の死亡時点まで定期的なキャッシュフロー（保険料や保険金等）を受け取り，時点でだけ受け取る状況を想定し，年金ファンドの富の確率的な変動を考える．

無裁定条件が成立しているとすれば，は以下のように表される．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (115) |

(.115)式を満たすの確率微分方程式として以下の式が挙げられる．ただし，は拡散項の係数である．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (116) |

実際，(.116)式が(.115)式を満たすことは以下のようにして確かめられる．伊藤の公式により，

|  |  |
| --- | --- |
|  | (117) |

拡散項の係数については次のように決定できる．市場に個のリスク性資産と安全資産があり，以下の確率微分方程式を満たすとする．

|  |  |
| --- | --- |
| ：対角成分がである対角行列．  ：次元ベクトル  ：行列  ：次元のブラウン運動 | (118) |

ファンドの富は以下のように表される．

|  |  |
| --- | --- |
| ：リスク性資産のウェイト（次元ベクトル）  ：安全資産のウェイト | (119) |

(.119)式より，の確率的な変動は以下のように表される．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (120) |

ここで，self-financing条件より，

|  |  |
| --- | --- |
|  | (121) |

となるので，富の変動は以下の確率微分方程式で表される．

|  |  |
| --- | --- |
|  | (122) |

## 付録　確率測度論

* 加法族，可測集合，可測空間

ある空でない集合Sに対して，その部分集合族Mが以下の性質を満たすとき，Mは加法族という．

* に対して，ならば，以下の性質が成立する．

また，Sの部分集合で，M属するものをM可測という．また，（S,M）の対を可測空間という．

* 測度，測度空間

可測空間（S,M）に対してＭ上で定義された関数が以下の性質を満たすとき，を測度という．

* 任意のに対し，である．特に
* が非交差的ならば，
* 可測関数

可測空間（S,F）と（E,G）に対して，関数が可測であるとは，任意のに対して，fによるその引き戻しがに属することである．

* 確率変数

確率空間と可測空間に対し，上で定義された関数が-可測であるとき，を確率変数という．

* 確率変数から生成された加法族

確率空間上で定義された可測空間に値をとる確率変数として確率変数に対し，集合族をから生成された集合族という．この集合を含む最小の加法族を確率変数から生成された加法族という．

1. 例えば，確定的な量（ただし，は正の値であるとする）に対して，以下の式が成立する． [↑](#footnote-ref-1)
2. Shane, F., Loewenstein, G., & O’Donoghue, T. (2002). Time discounting and time preferences: A

   critical review. *Journal of Economic Literature, 40*, 351–401. [↑](#footnote-ref-2)
3. 本節では不確実性を導入するために，ウィーナー過程を使用したが，レビィ過程による導入も近年の発展で見受けられる． [↑](#footnote-ref-3)
4. (5.29)の正当性は(5.33)の変換を観測データに対して適用し，等分散性の検定を行うことで確かめられる． [↑](#footnote-ref-4)
5. ラドンニコディム微分がマルチンゲールであるための十分条件としていわゆるノビコフ条件がある． [↑](#footnote-ref-5)
6. 死力という言葉自体は，企業の倒産確率等の文脈でも使用される． [↑](#footnote-ref-6)
7. (5.15)式は子供を除いて，実際の生存率をかなり正確に記述できる．また，例として，（いわゆるpure Gompertz）の場合についてパラメータ推定がなされている．この例では，の値として，男性が，女性がという値が得られている．の値としては男性が，女性がという値が得られている． [↑](#footnote-ref-7)
8. かつてはフランスやイギリス，アメリカで一般的な年金商品であったが，上述の仕組み上，出資者同士で

   殺しあう事が助長されるため，禁止された． [↑](#footnote-ref-8)
9. 売り手に対して支払われる前金は保険金の約20％～40%であり，ブローカーに対する支払いは5%～6%程度である． [↑](#footnote-ref-9)
10. 年金ファンドの選好を考慮した値． [↑](#footnote-ref-10)